Published online on the page : https://journal.makwafoundation.org/index.php/edusain

EDUSAINS:
Journal of Education and Science

| ISSN (*Online*) 3030-8267 |

Pelabelan Vertex Graceful pada Graf-(5,8)

Zebbil Billian Tomi[1], *Mhd Furqan Akbar*[2], *Fifian Fitra Janeva*[3], *Gema Hista Medika*[4*], *Nuryanuwar*[5], *Nurul Ziqra*[6]

[1]*Universitas Putra Indonesia YPTK Padang, Padang,* Indonesia
[2]*Institut Teknologi Sepuluh Nopember, Surabaya,* Indonesia
[3,4]*UIN Sjech M. Djamil Djambek Bukittinggi, Bukittinggi*, Indonesia
[5,6]*Universitas Andalas, Padang, Indonesia*

Informasi Artikel

Sejarah Artikel:
Submit : 28 Maret 2025
Revisi : 04 April 2025
Diterima : 17 Mei 2025
Diterbitkan: 30 Juni 2025

Kata Kunci

pelabelan vertex-graceful, graf sederhana, graf-(5,8), graf tidak isomorfik,

Correspondence

E-mail: medikazebil@yahoo.co.id*

A B S T R A K

Beberapa kajian terdahulu tentang pelabelan vertex-graceful telah banyak dilakukan pada berbagai jenis graf. Penelitian ini merupakan lanjutan dari penelitian-penelitian sebelumnya, dengan tujuan untuk menentukan pelabelan vertex-graceful pada graf-(5,8). Graf-(5,8) merupakan graf yang memiliki 5 titik dan 8 sisi. Penelitian ini dibatasi pada graf sederhana, terhubung, dan berhingga. Jenis penelitian yang digunakan adalah penelitian deskriptif kualitatif, dengan metode yang digunakan yaitu studi pustaka (library research) serta teknik analisis data non-statistik. Berdasarkan hasil kajian diperoleh bahwa terdapat 2 graf-(5,8) yang tidak isomorfik, yaitu G_1 dan G_2. Dari hasil analisis pelabelan, diketahui bahwa tidak satupun dari kedua graf tersebut memenuhi kriteria pelabelan vertex-graceful. Dengan demikian, dapat disimpulkan bahwa tidak ada graf-(5,8) yang merupakan pelabelan vertex-graceful..

Abstract

Several previous studies on vertex-graceful labeling have been conducted on various types of graphs. This research is a continuation of previous studies, aiming to determine the vertex-graceful labeling on the graph-(5,8). A graph-(5,8) is a graph consisting of 5 vertices and 8 edges. This study is limited to simple, connected, and finite graphs. The type of research used is descriptive qualitative, employing a library research method and non-statistical data analysis techniques. Based on the results of the study, there are two non-isomorphic graph-(5,8), namely G_1 and G_2. The analysis shows that none of these two graphs satisfy the criteria of vertex-graceful labeling. Therefore, it can be concluded that there is no graph-(5,8) that admits a vertex-graceful labeling.

1. Pendahuluan

Matematika merupakan ilmu dasar yang berperan penting dalam mengembangkan berbagai bidang ilmu pengetahuan dan teknologi modern. Salah satu cabang matematika yang banyak digunakan untuk memodelkan fenomena nyata dan hubungan antarobjek adalah teori graf. Teori graf berfokus pada struktur hubungan antar titik (vertex) yang dihubungkan oleh sisi (edge), dan digunakan secara luas dalam bidang ilmu komputer, jaringan komunikasi, biologi, ekonomi, serta rekayasa sistem (Bondy & Murty, 2008). Dengan kemampuannya merepresentasikan relasi yang kompleks secara sederhana, teori graf menjadi alat analisis yang sangat penting dalam dunia akademik maupun industri.

Awal mula teori graf ditandai oleh pemecahan masalah klasik tujuh jembatan Königsberg oleh Leonhard Euler pada tahun 1736. Euler memperkenalkan konsep keterhubungan (connectivity)

10.57255/edusain.v1i1.17

sebagai dasar terbentuknya teori graf modern (Gross & Yellen, 2006). Sejak saat itu, teori graf berkembang pesat dan melahirkan berbagai konsep turunan, salah satunya adalah pelabelan graf (graph labeling). Pelabelan graf adalah proses pemberian label berupa bilangan atau simbol pada elemen graf (titik, sisi, atau keduanya) berdasarkan aturan tertentu (Gallian, 2018). Konsep ini tidak hanya menarik secara teoritis, tetapi juga memiliki berbagai aplikasi praktis seperti dalam sistem pengkodean (coding theory), enkripsi data, penjadwalan, serta perancangan sirkuit digital (Lee et al., 2005); (Santhakumaran & Balaganesan, 2018).

1.1Latar Belakang dan Konsep Dasar

Salah satu jenis pelabelan yang paling banyak dikaji adalah pelabelan graceful (graceful labeling). Konsep graceful pertama kali diperkenalkan oleh Rosa (1967) (Rosa, 1967) dan Kotzig (1970) , yang mendefinisikannya untuk graf $G(V,E)$dengan $|V|=p$dan $|E|=q$. Sebuah pelabelan dikatakan graceful jika terdapat fungsi injektif

$$f: V(G) \to \{0,1,2,\ldots,q\}$$

sehingga setiap sisi $uv \in E(G)$diberi label $f^*(uv) = |f(u) - f(v)|$, dan label sisi yang dihasilkan membentuk himpunan $\{1,2,\ldots,q\}$ tanpa pengulangan (Rosa, 1967); (Gallian, 2018). Pelabelan ini penting karena memungkinkan pembentukan struktur graf yang unik dan teratur, serta memiliki hubungan erat dengan teori kombinatorial.

Dalam perkembangannya, muncul varian baru yang disebut pelabelan vertex-graceful, yang diperkenalkan oleh (Lee et al., 2005). Berbeda dengan pelabelan graceful konvensional yang berfokus pada selisih dua label titik, pelabelan vertex-graceful menggunakan hasil penjumlahan label dua titik yang terhubung, kemudian dikonversi secara modulo terhadap jumlah sisi graf. Dengan demikian, pelabelan vertex-graceful menekankan keseimbangan kombinatorial antara titik dan sisi graf. Secara formal, suatu graf $G(V,E)$dengan $|V|=p$dan $|E|=q$dikatakan vertex-graceful jika terdapat fungsi bijektif

$$f: V(G) \to \{1,2,\ldots,p\}$$

sedemikian sehingga fungsi turunan

$$f^+(uv) = (f(u) + f(v)) \bmod q$$

merupakan fungsi bijektif dari $E(G)$ ke $\{0,1,2,\ldots,q-1\}$ (Lee et al., 2005) (Medika & Tomi, 2022).

Pelabelan vertex-graceful tidak hanya bernilai teoretis, tetapi juga dapat diaplikasikan dalam kriptografi (cryptography), teori pengkodean (coding theory), serta pengoptimalan jaringan komunikasi. Dalam sistem kriptografi, label yang unik pada setiap sisi dan titik dapat dimanfaatkan untuk mengembangkan algoritma enkripsi berbasis topologi graf. Sementara itu, pada jaringan komputer, vertex-graceful labeling dapat digunakan untuk menentukan jalur transmisi yang efisien dan menghindari interferensi kanal (Pakpahan & others, 2024)(Zeeneldeen & others, 2021).

1.2 Penelitian Terdahulu

Penelitian terkait pelabelan graceful dan turunannya telah dilakukan oleh berbagai peneliti selama beberapa dekade terakhir. (Gallian, 2018) mencatat lebih dari seratus variasi pelabelan graf yang telah ditemukan, menunjukkan betapa luas dan dinamisnya bidang ini. (Anjani & others, 2012) mengkaji pelabelan *super graceful* pada graf khusus, sementara (Sari & others, 2013) meneliti pelabelan pada graf roda dan graf bisikel. Hasil-hasil tersebut menunjukkan bahwa setiap kelas graf memiliki karakteristik pelabelan yang unik.

Dalam konteks pelabelan vertex-graceful, (Lee et al., 2005) mempelopori penelitian dengan meneliti graf $(p, p+1)$ untuk $p=5$dan $p=6$. Mereka menemukan bahwa terdapat tiga graf vertex-graceful untuk graf-(5,6) dan empat belas untuk graf-(6,7). Penelitian tersebut menjadi acuan penting bagi banyak studi lanjutan. Kemudian, (Medika, 2019) meneliti pelabelan vertex-graceful pada graf berukuran kecil seperti graf-(4,5), dan berhasil menunjukkan adanya pola keteraturan dalam pembentukan label sisi berdasarkan penjumlahan label titik.

Selanjutnya, penelitian oleh (Medika & Tomi, 2022) memperluas kajian ke graf-(6,8) dan menemukan bahwa dari 20 graf tidak isomorf, 10 di antaranya merupakan graf vertex-graceful. Studi ini menunjukkan bahwa dengan bertambahnya jumlah sisi, peluang eksistensi pelabelan vertex-graceful tidak menurun secara linier, melainkan mengikuti pola tertentu yang bergantung pada struktur keterhubungan graf. Penelitian berikutnya oleh (Medika & others, 2024) pada graf-(5,7) mengonfirmasi bahwa semua graf tidak isomorf dengan lima titik dan tujuh sisi adalah vertex-graceful. Temuan ini memperkuat hipotesis bahwa banyak graf sederhana dengan rasio q terhadap p tertentu cenderung memiliki sifat vertex-graceful.

Penelitian paling mutakhir oleh (Medika et al., 2025) pada graf-(7,8) berhasil menunjukkan bahwa seluruh enam belas graf tidak isomorf yang dikaji memiliki pelabelan graceful titik. Hasil tersebut menjadi dasar untuk memperluas penelitian ke graf-(5,8), yaitu graf dengan lima titik dan delapan sisi, guna mengetahui apakah pola vertex-graceful tetap berlaku pada struktur yang lebih padat.

1.3 Kesenjangan dan Urgensi Penelitian

Meskipun penelitian mengenai pelabelan vertex-graceful pada graf berukuran kecil hingga sedang sudah banyak dilakukan, graf-(5,8) belum pernah dibahas secara spesifik dalam literatur yang ada. Penelitian sebelumnya lebih banyak meneliti graf dengan jumlah sisi q=p+1, q=p+2, atau q=p+3, sedangkan graf-(5,8) memiliki jumlah sisi yang relatif lebih padat karena q=p+3.

Hal ini menarik untuk dikaji karena meningkatnya rasio jumlah sisi terhadap titik dapat mempengaruhi peluang eksistensi pelabelan vertex-graceful. Graf-(5,8) memiliki tingkat keterhubungan yang lebih kompleks dibandingkan graf-(5,7), namun belum mencapai densitas graf lengkap K_5yang memiliki 10 sisi. Oleh karena itu, penelitian terhadap graf-(5,8) diharapkan dapat memberikan pemahaman yang lebih dalam mengenai hubungan antara jumlah titik, jumlah sisi, dan eksistensi pelabelan vertex-graceful.

Selain itu, penelitian terhadap graf-(5,8) juga penting untuk memperluas basis data empiris pola pelabelan vertex-graceful. Melalui analisis terhadap seluruh graf-(5,8) yang sederhana dan terhubung, dapat diketahui apakah pola keteraturan yang ditemukan pada graf-(5,7) tetap berlaku, berubah, atau memiliki bentuk baru.

Secara aplikatif, hasil penelitian ini dapat digunakan untuk pengembangan algoritma labeling otomatis yang berguna dalam pengaturan frekuensi jaringan komunikasi, sistem keamanan data, serta desain topologi jaringan (Pakpahan & others, 2024)(Zeeneldeen & others, 2021).

1.4 Kebaruan Penelitian

Kebaruan (novelty) utama dari penelitian ini adalah analisis sistematis terhadap eksistensi pelabelan vertex-graceful pada graf-(5,8). Belum ada penelitian sebelumnya yang mengkaji struktur ini secara mendalam. Jika penelitian terdahulu berfokus pada graf-(5,7) dan graf-(6,8), penelitian ini menempati posisi penting dalam rentang tersebut dan memberikan jembatan konseptual untuk memahami transisi sifat vertex-graceful antara graf yang lebih jarang dan lebih padat.

Selain itu, penelitian ini juga berpotensi melahirkan pola matematis baru yang menggambarkan hubungan antara jumlah titik, jumlah sisi, dan keberadaan fungsi vertex-graceful. Temuan tersebut diharapkan menjadi dasar bagi penyusunan konjektur umum pelabelan vertex-graceful pada graf dengan orde kecil hingga menengah.

1.5 Tujuan Penelitian

Tujuan utama penelitian ini adalah untuk menentukan apakah graf-(5,8) merupakan graf vertex-graceful. Secara rinci, tujuan penelitian ini meliputi:

1. Menentukan eksistensi pelabelan vertex-graceful pada seluruh graf-(5,8) sederhana yang terhubung dan tidak isomorf.
2. Menemukan pola pembentukan label vertex-graceful yang berlaku untuk graf-(5,8).
3. Membandingkan hasil penelitian ini dengan graf-(5,7) dan graf-(6,8) untuk mengetahui pola umum pelabelan vertex-graceful.

1.6 Signifikansi Penelitian

Penelitian ini diharapkan memberikan tiga kontribusi utama. Pertama, dari sisi teoretis, hasil penelitian ini memperluas cakupan pengetahuan tentang pelabelan vertex-graceful dengan menambahkan data empiris baru untuk graf-(5,8). Kedua, dari sisi praktis, hasil penelitian ini dapat menjadi dasar pengembangan algoritma pelabelan otomatis yang berguna untuk sistem pengkodean dan kriptografi. Ketiga, dari sisi pendidikan, penelitian ini dapat dijadikan referensi pembelajaran pada mata kuliah Teori Graf dan Matematika Diskrit, khususnya dalam topik pelabelan graf.

Dengan demikian, penelitian ini tidak hanya melanjutkan penelitian sebelumnya, tetapi juga memperkaya pemahaman mengenai pola vertex-graceful pada graf berorde lima dengan delapan sisi. Temuan ini diharapkan memberikan kontribusi berarti terhadap pengembangan teori pelabelan graf modern.

2. Metodologi Penelitian

Penelitian ini merupakan penelitian deskriptif kualitatif di bidang matematika murni, khususnya pada cabang teori graf kombinatorial, yang berfokus pada pembuktian eksistensi pelabelan vertex-graceful pada graf-(5,8). Pendekatan penelitian bersifat teoretis-analitik, yaitu menggunakan pembuktian logis dan konstruksi matematis untuk mengidentifikasi apakah graf dengan lima titik dan delapan sisi dapat dilabeli secara vertex-graceful.

Penelitian ini tidak menggunakan data empiris atau eksperimen laboratorium, melainkan analisis deduktif berdasarkan definisi formal, aksioma, serta teorema yang berlaku dalam teori graf. Prosedur penelitian mencakup tahapan identifikasi graf, pemberian label titik, perhitungan label sisi, dan pembuktian bijektivitas fungsi pelabelan.

2.1. Jenis dan Pendekatan Penelitian

Jenis penelitian ini adalah penelitian teoretis deskriptif, dengan pendekatan kombinatorial matematis (Bondy & Murty, 2008). Pendekatan kombinatorial digunakan karena pelabelan vertex-graceful melibatkan distribusi bilangan secara teratur pada elemen-elemen graf berhingga (finite graph).

Menurut (Gross & Yellen, 2006), pendekatan kombinatorial efektif untuk menelusuri keteraturan struktur pada graf dengan jumlah vertex dan edge yang terbatas. Dalam penelitian ini, graf yang dikaji memiliki lima titik ($p=5$) dan delapan sisi ($q=8$). Semua graf-(5,8) yang sederhana (simple) dan terhubung (connected) akan dianalisis untuk menentukan apakah terdapat fungsi pelabelan vertex-graceful yang memenuhi syarat bijektivitas

2.2. Objek dan Ruang Lingkup Penelitian

Objek penelitian ini adalah seluruh graf-(5,8) sederhana dan terhubung. Berdasarkan teori graf, jumlah maksimum sisi pada graf dengan lima titik adalah

$$\frac{p(p-1)}{2} = \frac{5 \times 4}{2} = 10.$$

Dengan demikian, graf-(5,8) memiliki tingkat kerapatan (density) sebesar $\frac{2q}{p(p-1)} = \frac{16}{20} = 0.8$. Artinya, struktur graf yang dikaji cukup padat, tetapi belum mencapai graf lengkap K_5.

Dalam ruang lingkup ini, hanya graf yang tidak isomorf yang akan dianalisis. Dua graf dianggap isomorf jika terdapat pemetaan satu-satu antara vertex-nya yang mempertahankan hubungan keterhubungan sisi. Oleh karena itu, identifikasi awal dilakukan untuk memastikan setiap graf-(5,8) yang dikaji mewakili struktur yang berbeda secara topologis (Hartsfield & Ringel, 1990).

2.3. Definisi dan Konsep Dasar

Penelitian ini menggunakan definisi formal pelabelan vertex-graceful sebagaimana diperkenalkan oleh (Lee et al., 2005). Diberikan suatu graf $G(V, E)$dengan $|V| = p$dan $|E| = q$. Graf tersebut disebut vertex-graceful jika terdapat fungsi bijektif

$$f: V(G) \rightarrow \{1,2, \dots, p\}$$

sedemikian sehingga fungsi turunan

$$f^+(uv) = (f(u) + f(v)) \bmod q,$$

yang memetakan setiap sisi $uv \in E(G)$ke himpunan $\{0,1,2, \dots, q-1\}$, juga bersifat bijektif.

Artinya, setiap sisi mendapatkan label unik sebagai hasil penjumlahan label dua vertex yang terhubung, dikonversi melalui operasi modulo terhadap jumlah sisi (Santhakumaran & Balaganesan, 2018). Kondisi ini memastikan bahwa setiap sisi memiliki identitas numerik yang berbeda, tanpa duplikasi nilai.

2.4. Prosedur Penelitian

Tahapan penelitian ini meliputi beberapa langkah sistematis berikut.

a. Identifikasi Struktur Graf-(5,8)

Langkah pertama adalah menentukan semua kemungkinan struktur graf-(5,8) sederhana dan terhubung. Proses ini dilakukan dengan:

1. Menentukan semua urutan derajat (degree sequence) yang memungkinkan untuk $p = 5$dan $q = 8$.
2. Menggambar semua kemungkinan graf sesuai urutan derajat tersebut.
3. Mengeliminasi graf-graf yang isomorf melalui pemeriksaan struktur konektivitas.

Hasilnya diperoleh sejumlah graf-(5,8) yang tidak isomorf, yang menjadi sampel analisis dalam penelitian ini.

b. Penentuan Fungsi Pelabelan Vertex

Setiap vertex $v_i \in V(G)$diberi label dari himpunan $\{1,2,3,4,5\}$. Pemberian label dilakukan secara sistematis untuk menghasilkan kemungkinan kombinasi fungsi pelabelan yang memenuhi sifat bijektif.

Label vertex dipilih sedemikian rupa agar perhitungan $f^+(uv)$menghasilkan nilai-nilai unik dalam modulo 8. Untuk setiap kombinasi label, akan diperiksa hasil perhitungan label sisi agar diketahui apakah syarat vertex-graceful terpenuhi.

c. Penentuan Label Sisi

Setiap sisi $uv \in E(G)$diberi label berdasarkan formula:

$$f^+(uv) = (f(u) + f(v)) \bmod 8.$$

Hasil label sisi diperiksa untuk memastikan tidak ada dua sisi yang memiliki label sama. Jika seluruh sisi memiliki nilai label berbeda dan mencakup himpunan $\{0,1,2,\ldots,7\}$, maka graf tersebut dikatakan vertex-graceful.

d. Pembuktian Bijektivitas

Untuk setiap kombinasi pelabelan yang memenuhi kondisi di atas, dilakukan pembuktian bahwa:

1. Fungsi $f$adalah bijektif pada himpunan vertex.
2. Fungsi f^+adalah bijektif pada himpunan sisi.

Pembuktian ini dilakukan melalui pendekatan deduktif logis dan validasi manual untuk setiap struktur graf-(5,8). Pendekatan ini sesuai dengan metode yang digunakan oleh (Medika et al., 2024) dalam kajian vertex-graceful pada graf-(5,7).

2.5. Analisis Data dan Pembuktian

Analisis data dilakukan dengan pendekatan deduktif matematis, dimulai dari prinsip umum ke kasus khusus. Proses analisis melibatkan tahapan sebagai berikut:

1. Menghitung seluruh kombinasi fungsi pelabelan vertex f.
2. Menghasilkan label sisi $f^+(uv)$untuk setiap sisi.
3. Menguji apakah f^+menghasilkan nilai berbeda untuk semua sisi.
4. Menentukan apakah graf-(5,8) yang diuji termasuk vertex-graceful.

Setiap hasil pelabelan yang memenuhi kriteria akan dicatat dan dibandingkan dengan hasil penelitian terdahulu pada graf-(5,7) dan graf-(6,8). Perbandingan ini bertujuan untuk mengidentifikasi pola konsistensi atau anomali dalam distribusi pelabelan (Medika & Tomi, 2022)(Medika & others, 2024).

2.6. Validasi Hasil

Validasi hasil dilakukan melalui dua pendekatan:

1. Validasi Internal: memeriksa konsistensi antara hasil pelabelan dan definisi formal vertex-graceful. Jika terjadi duplikasi label sisi atau ketidaksesuaian jumlah label, pelabelan dianggap tidak valid.
2. Validasi Eksternal: membandingkan hasil penelitian ini dengan hasil penelitian serupa pada graf berukuran berdekatan seperti graf-(5,7), graf-(6,8), dan graf-(7,8). Konsistensi pola pelabelan di antara graf tersebut akan memperkuat keabsahan hasil (Medika et al., 2025).

Karena penelitian ini bersifat teoretis, validitas hasil ditentukan oleh kebenaran logis dan konsistensi matematis, bukan oleh pengulangan eksperimen. Oleh sebab itu, setiap tahap pembuktian harus dapat direproduksi berdasarkan definisi yang sama (Gallian, 2018).

2.7. Alur Penelitian

Secara ringkas, tahapan penelitian dapat dijabarkan sebagai berikut:

1. Menentukan parameter graf: $p = 5, q = 8$.

2. Mengidentifikasi semua graf-(5,8) sederhana dan terhubung yang tidak isomorf.
3. Memberi label vertex dengan bilangan 1 sampai 5.
4. Menghitung label sisi dengan operasi $(f(u) + f(v)) \bmod 8$.
5. Memeriksa keunikan label sisi.
6. Menentukan graf yang memenuhi syarat vertex-graceful.
7. Menyusun pola atau rumus umum dari hasil pelabelan.

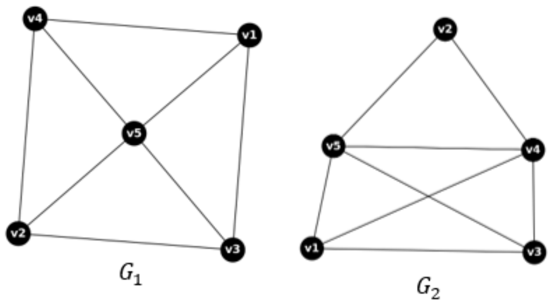
Langkah-langkah ini dilakukan secara manual dengan bantuan diagram graf. Bila diperlukan, verifikasi tambahan dapat dilakukan menggunakan perangkat lunak seperti GraphTea atau SageMath, sebagaimana disarankan oleh (Zeeneldeen & others, 2021) untuk analisis graf berukuran kecil.

2.8. Sumber Data dan Teknik Dokumentasi

Data penelitian bersumber dari konstruksi graf yang dihasilkan secara teoritis. Tidak digunakan data sekunder dari luar karena penelitian ini murni bersifat matematis. Hasil perhitungan, kombinasi label, dan pembuktian dicatat dalam tabel dan diagram graf untuk menjaga kejelasan proses serta memudahkan proses verifikasi ulang.

3. Hasil dan Pembahasan

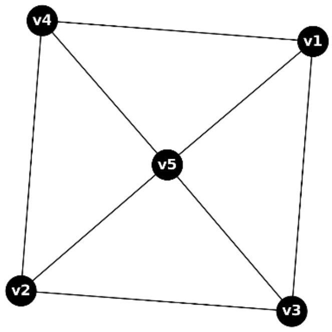
Teorema 3.1. Dari 2 Graf (5,8) Seperti yang ditunjukkan pada Gambar 1 tidak ada satupun yang merupakan pelabelan vertex graceful.



Gambar 1. Graf (5,8)

Bukti. Pada masing-masing graf G1 dan G2, karena memiliki 5 titik (5 angka) maka terdapat 5 faktorial yaitu 120 kemungkinan susunan angka.

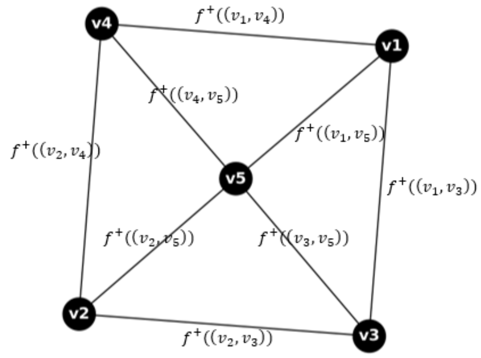
a) Untuk graf G_1 (ada 120 kemungkinan). Misalkan $V(G_1) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$



Gambar 2. Ilustrasi $V(G_1)$

- Kemungkinan pertama, definisikan $f: V(G_1) \to \{1,2,3,4,5\}$.

$v_1 \mapsto 1, v_2 \mapsto 2, v_3 \mapsto 3, v_4 \mapsto 4, v_5 \mapsto 5$, dan $f^+ : E(G_1) \to Z_q$ dimana $q = 8$,
$(v_j, v_k) \mapsto \left(f(v_j) + f(v_k)\right) \, mod \, 8, \quad j \neq k$ dan
$f^+(\neg mod) : E(G_1) \to \{\min\{f(v_j) + f(v_k)\}, \dots, maks\{f(v_j) + f(v_k)\}; (v_j, v_k) \mapsto f(v_j) + f(v_k), \quad j \neq k$
Akan ditunjukkan apakah pelabelan di atas merupakan pelabelan vertex graceful.

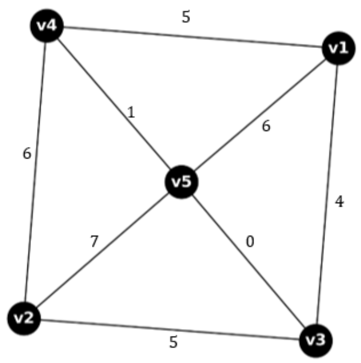


Gambar 3. Ilustrasi pelabelan vertex graceful Graf $G_1(1)$

Dari definisi fungsi diperoleh

$f^+((v_1, v_3)) = (f(v_1) + f(v_3)) \, mod \, 8 = (1 + 3) \, mod \, 8 = 4$
$f^+((v_1, v_4)) = (f(v_1) + f(v_4)) \, mod \, 8 = (1 + 4) \, mod \, 8 = 5$
$f^+((v_1, v_5)) = (f(v_1) + f(v_5)) \, mod \, 8 = (1 + 5) \, mod \, 8 = 6$
$f^+((v_2, v_3)) = (f(v_2) + f(v_3)) \, mod \, 8 = (2 + 3) \, mod \, 8 = 5$
$f^+((v_2, v_4)) = (f(v_2) + f(v_4)) \, mod \, 8 = (2 + 4) \, mod \, 8 = 6$
$f^+((v_2, v_5)) = (f(v_2) + f(v_5)) \, mod \, 8 = (2 + 5) \, mod \, 8 = 7$
$f^+((v_3, v_5)) = (f(v_3) + f(v_5)) \, mod \, 8 = (3 + 5) \, mod \, 8 = 0$
$f^+((v_4, v_5)) = (f(v_4) + f(v_5)) \, mod \, 8 = (4 + 5) \, mod \, 8 = 1$

Dengan memasukkan nilai-nilai di atas, diperoleh graf yang sudah dilabeli sebagai berikut:



Gambar 4. Pelabelan vertex graceful Graf G_1 yang sudah dilabeli (I)

Karena ada beberapa sisi yang mempunyai label yang sama maka pelabelan di atas bukanlah pelabelan vertex graceful. Pelabelan graf di atas dapat ditulis dalam bentuk tabel, seperti tampak pada Tabel 1 sebagai berikut:

Tabel 1. Pelabelan vertex graceful Graf $G_1(I)$

f					f^+								Ket
v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	(v_1, v_2)	(v_1, v_3)	(v_1, v_4)	(v_2, v_3)	(v_2, v_4)	(v_2, v_5)	(v_3, v_5)	(v_4, v_5)	
1	2	3	4	5	4	5	6	5	6	7	0	1	Tidak

Keterangan:

"Tidak" berarti pelabelan tersebut bukan pelabelan titik graceful karena ada beberapa sisi yang mempunyai label yang sama.

Dengan cara sama seperti cara di atas (kemungkinan pertama), untuk kemungkinan kedua sampai kemungkinan ke-120 agar lebih detil digunakan tabel untuk memeriksa apakah suatu graf tersebut graceful atau tidak. Dari 120 kemungkinan pada graf G_1 tidak ada susunan angka yang merupakan pelabelan vertex graceful.

Tabel 2. Pelabelan vertex graceful Graf G_1

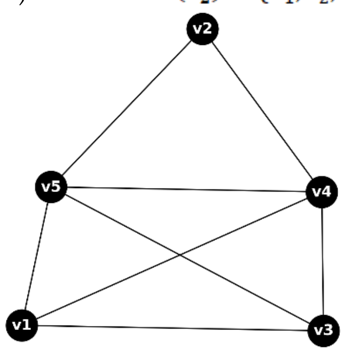
No	v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	(v_1,v_2)	(v_1,v_3)	(v_1,v_4)	(v_2,v_3)	(v_2,v_4)	(v_2,v_5)	(v_3,v_5)	(v_4,v_5)
1	1	2	3	4	5	1	5	1	1	2	3	4	5
2	1	2	3	5	4	1	6	2	1	2	3	5	4
3	1	2	4	3	5	0	5	3	1	2	4	3	5
4	1	2	4	5	3	0	5	4	1	2	4	5	3
5	1	2	5	3	4	7	6	5	1	2	5	3	4
6	1	2	5	4	3	7	6	6	1	2	5	4	3
7	1	3	2	4	5	1	5	7	1	3	2	4	5
8	1	3	2	5	4	1	6	0	1	3	2	5	4
9	1	3	4	2	5	7	5	1	1	3	4	2	5
10	1	3	4	5	2	7	5	2	1	3	4	5	2
11	1	3	5	2	4	6	6	3	1	3	5	2	4
12	1	3	5	4	2	6	6	4	1	3	5	4	2
13	1	4	2	3	5	0	6	5	1	4	2	3	5
14	1	4	2	5	3	0	6	6	1	4	2	5	3
15	1	4	3	2	5	7	6	7	1	4	3	2	5
16	1	4	3	5	2	7	6	0	1	4	3	5	2
17	1	4	5	2	3	5	6	1	1	4	5	2	3
18	1	4	5	3	2	5	6	2	1	4	5	3	2
19	1	5	2	3	4	7	7	3	1	5	2	3	4
20	1	5	2	4	3	7	5	4	1	5	2	4	3
21	1	5	3	2	4	6	7	5	1	5	3	2	4
22	1	5	3	4	2	6	5	6	1	5	3	4	2
23	1	5	4	2	3	5	5	7	1	5	4	2	3
24	1	5	4	3	2	5	5	0	1	5	4	3	2
25	2	1	3	4	5	1	5	1	2	1	3	4	5
26	2	1	3	5	4	1	5	2	2	1	3	5	4
27	2	1	4	3	5	0	6	3	2	1	4	3	5
28	2	1	4	5	3	0	6	4	2	1	4	5	3
29	2	1	5	3	4	7	7	5	2	1	5	3	4
30	2	1	5	4	3	7	7	6	2	1	5	4	3
31	2	3	1	4	5	1	6	7	2	3	1	4	5
32	2	3	1	5	4	1	7	0	2	3	1	5	4
33	2	3	4	1	5	6	6	1	2	3	4	1	5
34	2	3	4	5	1	6	6	2	2	3	4	5	1
35	2	3	5	1	4	5	7	3	2	3	5	1	4
36	2	3	5	4	1	5	7	4	2	3	5	4	1
37	2	4	1	3	5	0	5	5	2	4	1	3	5
38	2	4	1	5	3	0	7	6	2	4	1	5	3
39	2	4	3	1	5	6	5	7	2	4	3	1	5
40	2	4	3	5	1	6	5	0	2	4	3	5	1
41	2	4	5	1	3	4	7	1	2	4	5	1	3

42	2	4	5	3	1	4	7	2	2	4	5	3	1
43	2	5	1	3	4	7	5	3	2	5	1	3	4
44	2	5	1	4	3	7	6	4	2	5	1	4	3
45	2	5	3	1	4	5	5	5	2	5	3	1	4
46	2	5	3	4	1	5	5	6	2	5	3	4	1
47	2	5	4	1	3	4	6	7	2	5	4	1	3
48	2	5	4	3	1	4	6	0	2	5	4	3	1
49	3	1	2	4	5	1	5	1	3	1	2	4	5
50	3	1	2	5	4	1	5	2	3	1	2	5	4
51	3	1	4	2	5	7	7	3	3	1	4	2	5
52	3	1	4	5	2	7	7	4	3	1	4	5	2
53	3	1	5	2	4	6	5	5	3	1	5	2	4
54	3	1	5	4	2	6	7	6	3	1	5	4	2
55	3	2	1	4	5	1	7	7	3	2	1	4	5
56	3	2	1	5	4	1	7	0	3	2	1	5	4
57	3	2	4	1	5	6	7	1	3	2	4	1	5
58	3	2	4	5	1	6	7	2	3	2	4	5	1
59	3	2	5	1	4	5	7	3	3	2	5	1	4
60	3	2	5	4	1	5	7	4	3	2	5	4	1
61	3	4	1	2	5	7	5	5	3	4	1	2	5
62	3	4	1	5	2	7	5	6	3	4	1	5	2
63	3	4	2	1	5	6	5	7	3	4	2	1	5
64	3	4	2	5	1	6	5	0	3	4	2	5	1
65	3	4	5	1	2	3	5	1	3	4	5	1	2
66	3	4	5	2	1	3	5	2	3	4	5	2	1
67	3	5	1	2	4	6	5	3	3	5	1	2	4
68	3	5	1	4	2	6	7	4	3	5	1	4	2
69	3	5	2	1	4	5	5	5	3	5	2	1	4
70	3	5	2	4	1	5	5	6	3	5	2	4	1
71	3	5	4	1	2	3	7	7	3	5	4	1	2
72	3	5	4	2	1	3	7	0	3	5	4	2	1
73	4	1	2	3	5	0	6	1	4	1	2	3	5
74	4	1	2	5	3	0	6	2	4	1	2	5	3
75	4	1	3	2	5	7	7	3	4	1	3	2	5
76	4	1	3	5	2	7	7	4	4	1	3	5	2
77	4	1	5	2	3	5	6	5	4	1	5	2	3
78	4	1	5	3	2	5	7	6	4	1	5	3	2
79	4	2	1	3	5	0	5	7	4	2	1	3	5
80	4	2	1	5	3	0	5	0	4	2	1	5	3
81	4	2	3	1	5	6	7	1	4	2	3	1	5
82	4	2	3	5	1	6	7	2	4	2	3	5	1
83	4	2	5	1	3	4	5	3	4	2	5	1	3
84	4	2	5	3	1	4	7	4	4	2	5	3	1
85	4	3	1	2	5	7	5	5	4	3	1	2	5
86	4	3	1	5	2	7	5	6	4	3	1	5	2
87	4	3	2	1	5	6	6	7	4	3	2	1	5
88	4	3	2	5	1	6	6	0	4	3	2	5	1

89	4	3	5	1	2	3	5	1	4	3	5	1	2
90	4	3	5	2	1	3	6	2	4	3	5	2	1
91	4	5	1	2	3	5	5	3	4	5	1	2	3
92	4	5	1	3	2	5	5	4	4	5	1	3	2
93	4	5	2	1	3	4	6	5	4	5	2	1	3
94	4	5	2	3	1	4	6	6	4	5	2	3	1
95	4	5	3	1	2	3	7	7	4	5	3	1	2
96	4	5	3	2	1	3	7	0	4	5	3	2	1
97	5	1	2	3	4	7	7	1	5	1	2	3	4
98	5	1	2	4	3	7	7	2	5	1	2	4	3
99	5	1	3	2	4	6	7	3	5	1	3	2	4
100	5	1	3	4	2	6	5	4	5	1	3	4	2
101	5	1	4	2	3	5	7	5	5	1	4	2	3
102	5	1	4	3	2	5	5	6	5	1	4	3	2
103	5	2	1	3	4	7	6	7	5	2	1	3	4
104	5	2	1	4	3	7	6	0	5	2	1	4	3
105	5	2	3	1	4	5	6	1	5	2	3	1	4
106	5	2	3	4	1	5	6	2	5	2	3	4	1
107	5	2	4	1	3	4	6	3	5	2	4	1	3
108	5	2	4	3	1	4	6	4	5	2	4	3	1
109	5	3	1	2	4	6	6	5	5	3	1	2	4
110	5	3	1	4	2	6	6	6	5	3	1	4	2
111	5	3	2	1	4	5	7	7	5	3	2	1	4
112	5	3	2	4	1	5	7	0	5	3	2	4	1
113	5	3	4	1	2	3	6	1	5	3	4	1	2
114	5	3	4	2	1	3	7	2	5	3	4	2	1
115	5	4	1	2	3	5	6	3	5	4	1	2	3
116	5	4	1	3	2	5	6	4	5	4	1	3	2
117	5	4	2	1	3	4	7	5	5	4	2	1	3
118	5	4	2	3	1	4	7	6	5	4	2	3	1
119	5	4	3	1	2	3	6	7	5	4	3	1	2
120	5	4	3	2	1	3	7	0	5	4	3	2	1

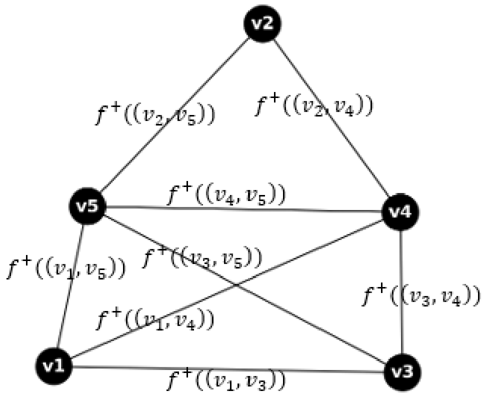
Dari Tabel 2 dapat dilihat bahwa pada graf G_1 tidak terdapat pelabelan vertex graceful. Jadi, graf G_1 bukan merupakan pelabelan vertex graceful.

b) Untuk graf G_2 (ada 120 kemungkinan). Misalkan $V(G_2) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$



Gambar 5. Ilustrasi $V(G_2)$

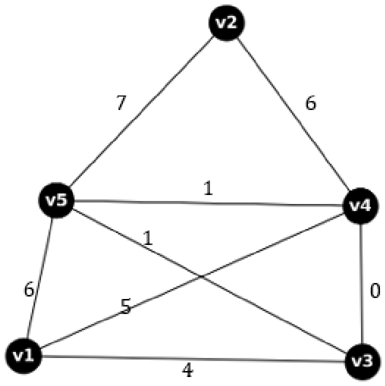
- Kemungkinan pertama, definisikan $f: V(G_2) \to \{1,2,3,4,5\}$.
$v_1 \mapsto 1, v_2 \mapsto 2, v_3 \mapsto 3, v_4 \mapsto 4, v_5 \mapsto 5$, dan $f^+: E(G_2) \to Z_q$ dimana $q = 8$,
$(v_j, v_k) \mapsto \left(f(v_j) + f(v_k)\right) mod\, 8, \quad j \neq k$ dan
$f^+(\neg mod): E(G_2) \to \{\min\{f(v_j) + f(v_k)\}, \ldots, maks\{f(v_j) + f(v_k)\}\ ; (v_j, v_k) \mapsto f(v_j) + f(v_k), \quad j \neq k$
Akan ditunjukkan apakah pelabelan di atas merupakan pelabelan vertex graceful.



Gambar 6. Ilustrasi pelabelan vertex graceful Graf $G_1(1)$

Dari definisi fungsi diperoleh
$f^+((v_1, v_3)) = (f(v_1) + f(v_3))\, mod\, 8 = (1+3)\, mod\, 8 = 4$
$f^+((v_1, v_4)) = (f(v_1) + f(v_4))\, mod\, 8 = (1+4)\, mod\, 8 = 5$
$f^+((v_1, v_5)) = (f(v_1) + f(v_5))\, mod\, 8 = (1+5)\, mod\, 8 = 6$
$f^+((v_2, v_4)) = (f(v_2) + f(v_4))\, mod\, 8 = (2+4)\, mod\, 8 = 6$
$f^+((v_2, v_5)) = (f(v_2) + f(v_5))\, mod\, 8 = (2+5)\, mod\, 8 = 7$
$f^+((v_3, v_4)) = (f(v_3) + f(v_4))\, mod\, 8 = (2+5)\, mod\, 8 = 7$
$f^+((v_3, v_5)) = (f(v_3) + f(v_5))\, mod\, 8 = (3+5)\, mod\, 8 = 0$
$f^+((v_4, v_5)) = (f(v_4) + f(v_5))\, mod\, 8 = (4+5)\, mod\, 8 = 1$

Dengan memasukkan nilai-nilai di atas, diperoleh graf yang sudah dilabeli sebagai berikut:



Gambar 7. Pelabelan vertex graceful Graf G_2 yang sudah dilabeli (I)

Karena ada beberapa sisi yang mempunyai label yang sama maka pelabelan di atas bukanlah pelabelan vertex graceful. Pelabelan graf di atas dapat ditulis dalam bentuk tabel, seperti tampak pada Tabel 1 sebagai berikut:

Tabel 3. Pelabelan vertex graceful Graf $G_2(I)$

f					f^+								Ket
v_1	v_2	v_3	v_4	v_5	(v_1, v_3)	(v_1, v_4)	(v_1, v_5)	(v_2, v_4)	(v_2, v_5)	(v_3, v_4)	(v_3, v_5)	(v_4, v_5)	
1	2	3	4	5	4	5	6	6	7	7	0	1	Tidak

Keterangan:

"Tidak" berarti pelabelan tersebut bukan pelabelan titik graceful karena ada beberapa sisi yang mempunyai label yang sama.

Dengan cara sama seperti cara di atas (kemungkinan pertama), untuk kemungkinan kedua sampai kemungkinan ke-120 kemungkinan pada graf G_2 tidak ada susunan angka yang merupakan pelabelan vertex graceful. Jadi dari 2 Graf (5,8) Seperti yang ditunjukkan pada Gambar 1 tidak ada satupun yang merupakan pelabelan vertex graceful

Pembahasan Matematis

Kegagalan kedua graf-(5,8) dalam memenuhi sifat vertex-graceful dapat dijelaskan secara matematis melalui beberapa pertimbangan berikut:

a. **Keterbatasan Kombinasi Modulo**
Dalam pelabelan vertex-graceful, operasi $(f(u)+f(v)) \bmod q$sangat bergantung pada variasi hasil penjumlahan label vertex. Pada kasus $p = \mathbf{5}$, jumlah maksimum label adalah 9 (karena 4 + 5 = 9). Bila dimodulo dengan 8, maka hanya ada delapan kemungkinan hasil (0–7), namun karena beberapa penjumlahan berbeda dapat menghasilkan nilai modulo yang sama, duplikasi label sisi menjadi sulit dihindari.

b. **Keseimbangan Derajat Titik**
Menurut Hartsfield dan Ringel (1990), salah satu syarat tidak formal bagi keberhasilan pelabelan graceful atau vertex-graceful adalah adanya distribusi derajat vertex yang seimbang. Pada graf-(5,8), distribusi derajat tidak seragam (Graf 1: satu vertex berderajat 4 dan empat vertex berderajat 3; Graf 2: dua vertex berderajat 4, satu berderajat 2, dua lainnya berderajat 3). Ketidakseimbangan ini menyebabkan ketidaksimetrian hasil penjumlahan label, sehingga sulit mencapai keunikan nilai modulo.

c. **Hilangnya Simetri pada Penghapusan Sisi**
Penghapusan dua sisi dari graf lengkap K_5mengganggu sifat simetri sempurna graf tersebut. Pada K_5, semua vertex berderajat 4, tetapi setelah dua sisi dihapus, muncul ketidakseimbangan derajat yang memengaruhi hasil penjumlahan label antarvertex. Hal ini berdampak langsung pada hasil operasi modulo dan keunikan label sisi (Gallian, 2018).

Perbandingan dengan Penelitian Sebelumnya

Hasil penelitian ini memperkuat beberapa temuan sebelumnya dan sekaligus memperluas batasan pemahaman tentang pelabelan vertex-graceful.

1. Perbandingan dengan Graf-(5,7)
   Medika et al. (2024)(Medika et al., 2024) melaporkan bahwa seluruh graf-(5,7) sederhana dan terhubung memiliki pelabelan vertex-graceful. Hal ini dimungkinkan karena jumlah sisi yang lebih sedikit memberikan ruang distribusi nilai modulo yang lebih stabil. Pada kasus (5,8), penambahan satu sisi justru meningkatkan tumpang tindih hasil operasi modulo, sehingga tidak ada konfigurasi label yang unik.
2. Perbandingan dengan Graf-(6,8)
   Medika dan Tomi (2022)(Medika & Tomi, 2022) menemukan bahwa pada graf-(6,8), hanya sebagian struktur graf yang bersifat vertex-graceful. Fakta ini menunjukkan bahwa keberhasilan pelabelan vertex-graceful tidak hanya bergantung pada perbandingan $q$terhadap p, tetapi juga pada pola konektivitas antarvertex.
3. Perbandingan dengan Graf-(7,8)
   Hasil penelitian Medika, Budiman, dan Yolanda (2025) (Medika et al., 2025) menyatakan bahwa seluruh graf-(7,8) adalah vertex-graceful. Hal ini kontras dengan hasil pada (5,8), menandakan bahwa peningkatan jumlah vertex justru dapat mengembalikan kestabilan struktur pelabelan karena ruang distribusi penjumlahan label semakin besar.

4. Kesimpulan

Berdasarkan hasil yang diperoleh, dapat disimpulkan pada graf-(5,8) terdapat 2 graf yang tidak isomorfik, dimana tidak satupun dari graf tersebut merupakan pelabelan vertex graceful. Hal ini dibuktikan melalui pengujian seluruh kemungkinan kombinasi pelabelan vertex dari himpunan $\{1,2,3,4,5\}$, yang menghasilkan label sisi berdasarkan fungsi turunan

$$f^+(uv) = (f(u) + f(v)) \bmod 8.$$

Dari seluruh kombinasi yang diperiksa, tidak ditemukan satu pun fungsi pelabelan yang menghasilkan label sisi unik pada himpunan $\{0,1,2,\dots,7\}$. Dengan demikian, fungsi turunan f^+tidak bersifat bijektif pada kedua graf tersebut.

Ketidakterpenuhan sifat vertex-graceful pada graf-(5,8) disebabkan oleh beberapa faktor, antara lain:

1. Distribusi derajat vertex yang tidak seimbang, yang menyebabkan hasil operasi modulo menghasilkan nilai ganda.
2. Hilangnya simetri graf akibat penghapusan dua sisi dari graf lengkap K_5.
3. Keterbatasan kombinasi nilai penjumlahan vertex dalam modulo 8, yang menyebabkan duplikasi label sisi tidak dapat dihindari.

Dengan demikian, dapat dirumuskan pernyataan umum bahwa tidak setiap graf-(p,q) dengan $q = p + 3$bersifat vertex-graceful, terutama jika struktur graf mengalami ketidakseimbangan derajat dan kehilangan simetri. Hasil ini memperkuat pemahaman bahwa eksistensi pelabelan vertex-graceful sangat bergantung pada keseimbangan struktur dan distribusi derajat titik dalam graf. Oleh karena itu, penelitian lanjutan disarankan untuk mengkaji graf dengan jumlah vertex lebih besar (p > 5) dan rasio sisi yang berbeda guna memperoleh pola umum keteraturan pelabelan vertex-graceful.

Daftar Pustaka

Anjani, N., & others. (2012). Super Graceful Labeling for Some Special Graphs. *Journal of Mathematical Analysis*.

Bondy, J. A., & Murty, U. S. R. (2008). *Graph Theory with Applications*. Springer.

Gallian, J. A. (2018). A Dynamic Survey of Graph Labeling. *The Electronic Journal of Combinatorics*.

Gross, J., & Yellen, J. (2006). *Graph Theory and Its Applications*. CRC Press.

Hartsfield, N., & Ringel, G. (1990). *Pearls in Graph Theory*. Academic Press.

Lee, S.-M., Y.C.Pan, & Tsai, M.-C. (2005). *On vertex-graceful (p,p+1)-graphs*. 172.

Medika, G. H. (2019). Pelabelan Vertex-Graceful pada Beberapa Graf. *Jurnal Sains Dan Matematika*.

Medika, G. H., Budiman, A., & Yolanda, R. (2025). Pelabelan Graceful Titik pada Graf-(7,8). *Journal of Mathematical Structures*.

Medika, G. H., & others. (2024). Pelabelan Vertex-Graceful pada Graf-(5,7). *Lattice Journal of Mathematics*.

Medika, G. H., & Tomi, Z. B. (2022). *Pelabelan vertex-graceful pada graf-(6,8)*. *6*(1), 63–70.

Medika, G. H., Tomi, Z. B., Akbar, M. F., Janeva, F. F., & Nuryanuwar. (2024). *Pelabelan Vertex-Graceful pada Graf-(5,7)*. *4*(1), 90–101.

Pakpahan, R., & others. (2024). Algoritma Pelabelan Graceful untuk Graf Bintang Multi-Level. *Jurnal Teknologi Dan Matematika Terapan*.

Rosa, A. (1967). On Certain Valuations of the Vertices of a Graph. *Theory of Graphs*, 349–355.

Santhakumaran, A., & Balaganesan, M. (2018). Vertex Graceful Labeling of Some Classes of Graphs. *International Journal of Pure and Applied Mathematics*, *118*(3), 573–582.

Sari, D., & others. (2013). Graceful Labeling on Wheel and Tricycle Graphs. *Indonesian Journal of Combinatorics*.

Zeeneldeen, A., & others. (2021). Strong Edge Even Graceful Labeling of Graphs. *Applied Mathematics and Computation*.